清华大学考试试题专用纸

考试课程: 求真书院代数博士生资格考

姓名: ____________

学号: ____________

- 考试时间: 2023 年 9 月
- 本试卷共 3 页, 9 道大题, 总分为 100 分.
- 考生默认遵守考试纪律, 不遵守者后果自负.
- 所有的解答请写出必要的细节, 推理依据和推理过程. 如果用到作业中证明的结论，请提供该结论的证明而不是直接引用。

以下题目中 $\mathbf{Q}$ 是有理数域， $\mathbf{R}$ 指实数域, $\mathbf{C}$ 指复数域, $\mathbf{Z}$ 指整数全体. **在题目中环均指含幺交换环**.

题 1 (5 分)**.** 假设群 G 包含有有限指数的子群，那么群 G 是否一定包含有有限指数的正规子群？如果是，请证明你的结论，如果不是，请举出反例.

Assume that G has a finite-index subgroup. Is it true that G always have a finite-index normal subgroup? If it is true, prove it. If it is false, provide a counter example.

题 2 (10 分)**.** 假设 G 是一个有限群，证明以下两条性质等价.

1. 如果 $g \in G$ 和 $h \in G$ 生成同一个循环群, 那么 g 和 h 在 G 中共轭.
2. 所有 G 的复表示的特征都是取整数值的.

Let G be a finite group. Prove that the following two statements are equivalent.

1. *If $g \in G$ and $h \in G$ generate the same cyclic group, then g and h are conjugate in G.*
2. *The characters of complex representations of G are integer-valued.*

题 3 (10 分)**.** 假设环 $R = \mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$.

1. 找出 R 的所有乘法可逆元，并证明你的结论.
2. 判定 R 是否是唯一分解整环，并证明你的结论.

Assume ring $R = \mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$.

1. *Find all the units in R and prove your conclusion.*

2. Decide whether R is a UFD or not and prove your conclusion.

题 4 (10 分)**.** 对任意奇数 $n>0$, 定义 $\mathbf{C}$ 代数 $R_n=\mathbf{C}[x,y]/(x^2-y^n)$. 令 A_n 为 R_n 的正规化，(即 R_n 在其分式域中的整闭包). 证明 $A_n\cong\mathbf{C}[t]$，并求 $\dim_{\mathbf{C}} A_n/R_n$

For any positive odd integer n, define $\mathbf{C}$-algebra $R_n=\mathbf{C}[x,y]/(x^2-y^n)$. Let A_n be the normalization of R_n, in other words, the integral closure of R_n in its fraction field. Prove that $A_n\cong\mathbf{C}[t]$, and find $\dim_{\mathbf{C}} A_n/R_n$.

题 5 (10 分)**.** 假设 R 是交换环, $m\le n$ 是正整数. 假设 $A\in M_{m\times n}(R)$ 是一个元素取值在 R 上的 $m\times n$ 矩阵. 假设 I 是 A 的 $m\times m$ 子式生成的 R 的理想. 对任意 $f\in I$, 存在矩阵 $B\in M_{n\times m}(R)$ 使得 $AB=fI_m$.

Let R be a commutative ring and $m\le n$ be positive integers. Assume $A\in M_{m\times n}(R)$, in other words a $m\times n$ matrix with entries in R. Let I be ideal generated by all $m\times m$ minors of A. For any $f\in I$, prove that there exists $B\in M_{n\times m}(R)$ such that $AB=fI_m$.

题 6 (10 分)**.** 记域 $K=\mathbf{C}(x)$, 令 $F=\mathbf{C}(x^3+x^{-3})$ 是 K 的子域.

1. 求 $[K:F]$.
2. 以 F 上的单扩张 $L=F[\alpha]$ 的形式写下所有的中间域 $F\subset L\subset K$.

Let field $K=\mathbf{C}(x)$ and $F=\mathbf{C}(x^3+x^{-3})$ be a subfield of K.

1. *Find $[K:F]$.*
2. *Write down all the intermediate fields $F\subset L\subset K$ in the form of simple extensions $L=F[\alpha]$ over F.*

题 7 (10 分)**.** 假设 f 是有理数上的有恰好三个实根的五次不可约多项式. 请问 f 是否根式可解. 证明你的结论.

Let f be an irreducible rational polynomial of degree five with exactly three real roots. Is f solvable by radicals or not? Prove your conclusion.

题 8 (15 分)**.** 假设 $\mathfrak{sl}_2$ 是 $\mathbf{C}$ 上的 2×2 的迹为零矩阵组成的李代数. 令 $\rho\colon \mathfrak{sl}_2\hookrightarrow\mathfrak{gl}_2$ 是李代数 $\mathfrak{sl}_2$ 的标准表示, 且 S_k 是 ρ 的 k 次对称积.

1. 证明 S_k 不可约.
2. 将 $\mathfrak{sl}_2$ 表示的张量积 $S_m\bigotimes S_l$ 写作不可约表示的直和.

Let $\mathfrak{sl}_2$ be complex Lie algebra consisting of 2×2 trace-zero matrices, and $\rho\colon \mathfrak{sl}_2\hookrightarrow\mathfrak{gl}_2$ be the standard representation of $\mathfrak{sl}_2$, and let S_k be the k-th symmetric product of ρ.

1. *Prove that S_k is irreducible.*
2. *Write down the $\mathfrak{sl}_2$ irreducible decomposition of tensor product $S_m\bigotimes S_l$.*

题 9 (20 分)**.** 假设 e_i $(i=1,\dots 4)$ 是 $\mathbf{R}^4$ 的标准基. 考虑 $\mathbf{R}^4$ 上由

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_4y_4$$

定义的对称双线性型. $\mathbf{R}^4$ 的一组基 f_i $(i=1,\dots 4)$ 称作标准正交的当且仅当

$$(f_1,f_1)=(f_2,f_2)=(f_3,f_3)=1,\quad (f_4,f_4)=-1,\quad (f_i,f_j)=0 \textit{ if } i\neq j.$$

假设 T 是 $\mathbf{R}^4$ 上的洛伦兹变换, 即线性变换 T 满足

$$(Tx,Ty)=(x,y)$$

对任意 $x,y\in\mathbf{R}^4$ 成立. 证明存在 $\mathbf{R}^4$ 的标准正交基使得在这组基下 T 的矩阵写作如下某些分块组成的分块对角矩阵.

1. 大小为 1 且元素为 ±1 的分块.
2. 如下形式的大小为 2 的分块.
$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$
3. 如下形式的大小为 2 的分块.
$$\pm\begin{pmatrix}\cosh\theta & \sinh\theta\\ \sinh\theta & \cosh\theta\end{pmatrix}\quad \textit{or}\ \pm\begin{pmatrix}\cosh\theta & \sinh\theta\\ -\sinh\theta & -\cosh\theta\end{pmatrix}.$$
4. 大小为 3 的分块, 特征值为 $\lambda=\pm1$, 使得 $(A-\lambda I)^3=0$ 但 $(A-\lambda I)^2\neq 0$.

Let e_i $(i=1,\dots 4)$ be the standard basis for $\mathbf{R}^4$. Consider the symmetric bilinear on $\mathbf{R}^4$ defined by

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_4y_4.$$

A basis f_i $(i=1,\dots 4)$ of $\mathbf{R}^4$ is called orthonormal if

$$(f_1,f_1)=(f_2,f_2)=(f_3,f_3)=1,\quad (f_4,f_4)=-1,\quad (f_i,f_j)=0 \textit{ if } i\neq j.$$

Suppose T is a Lorentz transformation on $\mathbf{R}^4$, that is, T is a linear transformation such that

$$(Tx,Ty)=(x,y)$$

for all $x,y\in\mathbf{R}^4$. Prove that there exists an orthonormal basis of $\mathbf{R}^4$ such that the matrix of T is block diagonal with blocks of the following types:

1. *A block of order 1 with entry ±1.*
2. *A block of order 2 of the form*
$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$
3. *a block of order 2 of the form*
$$\pm\begin{pmatrix}\cosh\theta & \sinh\theta\\ \sinh\theta & \cosh\theta\end{pmatrix}\quad \textit{or}\ \pm\begin{pmatrix}\cosh\theta & \sinh\theta\\ -\sinh\theta & -\cosh\theta\end{pmatrix}.$$
4. *A block A of order 3 with eigenvalue $\lambda=\pm1$ so that $(A-\lambda I)^3=0$ but $(A-\lambda I)^2\neq 0$.*