

博士生资格考试《几何与拓扑方向》考试大纲

一、前言

为了进一步提高清华大学求真书院博士研究生的质量, 特为几何与拓扑方向博士生资格考试制订本大纲。考试对象为参加清华大学博士生入学考试或资格考试的考生。

二、《几何与拓扑方向》考试大纲

光滑流形理论:

- 流形理论基础: 反函数定理, 隐函数定理, 子流形, Sard 定理, 横截性, 映射度理论
- 实数与复数域上的矩阵群: $Gl(n)$, $SU(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ 的定义, 流形结构, 李代数, 左不变与又不变向量场和微分形式, 指数映照。
- 实向量丛与复向量丛的定义, 切丛与余切丛, 向量丛的基本操作 (对偶丛, 张量积, 外积, 直和, 拉回等), 向量丛上的度量。
- 微分形式的定义, 微分形式的外积, 外微分, 流形上的积分, Stokes 定理, de Rham 上同调, Hodge 分解定理。
- 以李群为纤维的主丛的定义, 配丛的定义, 主丛与向量丛的关系。

微分几何:

- 移动标架法, 曲面的第一基本型与第二基本型, 高斯曲率, 高斯绝妙定理, Gauss-Bonnet 定理。
- 黎曼度量, 测地线的定义, 测地线的存在唯一性。
- 向量丛与主丛上的联络与协变导数, 两者的关系。
- 曲率的定义, 平坦联络, 平行移动。
- Levi-Civita 联络的定义, 黎曼曲率张量的定义和性质, 常截面曲率的流形。
- 长度的第一变分与第二变分公式。Jacobi 场。
- Bonnet-Meyers 定理, Cartan-Hadamard 定理, Synge 定理。
- 黎曼几何中的比较定理: Rauch 比较定理, Hessian 比较定理, Laplacian 比较定理等等。
- 正曲率流形与非正曲率流形。

代数拓扑:

- 基本群, Seifert-Van Kampen 定理。
- 覆盖空间, 万有覆盖空间, 正规覆盖空间, 覆盖空间的分类定理。
- 闭曲面分类定理。
- 奇异下同调与奇异上同调, 相对同调。
- CW 复形与它的同调。
- Mayer-Vietoris 序列。
- 万有系数定理与 Kunneth 公式。
- 上积与卡积, 空间的上同调环。
- 流形的基本类, 庞加莱对偶定理, 子流形的相交数, Lefschetz 对偶定理。
- Lefschetz 不动点定理。
- Hopf 指标定理。
- Cech 上同调 与 de Rham 上同调, 它们与奇异同调的等价性。
- 高维同伦群的定义和基本性质。

- 纤维丛的同伦群长正合列。
- Hurewicz 定理和 Whitehead 定理。

三、《几何与拓扑方向》考核要求目标

对《几何与拓扑方向》课程考试内容有很好的理解和掌握，包括基本定义、性质、定理及其证明思想、内在联系、主要技巧、主要理论的基本应用等。能应用基本理论、方法和技巧证明或解答相应的题目。

四、考试方式

闭卷，笔试，试卷满分 100 分

五、参考书目：

光滑流形：

- [1] V. Guillemin, A. Pollack: Differential topology
- [2] J. Milnor: Topology from the differentiable viewpoint
- [3] John Lee: Introduction to Smooth manifold

微分几何：

- [4] Cliff Taubes: Differential geometry: Bundles, Connections, Metrics and Curvature
- [5] John Lee: Introduction to Riemannian manifolds, second edition
- [6] Peter Petersson: Riemannian geometry
- [7] Do Carmo: Riemannian Geometry
- [8] S. Kobayashi and K. Nomizu: Foundations of Differential Geometry

代数拓扑：

- [9] 姜伯驹：同调论
- [10] Alan Hatcher: Algebraic Topology
- [11] Edwin Spanier: Algebraic Topology
- [12] William Fulton: Algebraic Topology
- [13] M. Greenberg and J. Harper: Algebraic Topology: A First Course