2023 年 4 月 TACA 数学测试

- 本试卷一共十五题.
- 可以使用以下的近似数值：$\pi \approx 3.14159$, $\sqrt{\pi} \approx 1.77245$, $\pi^2 \approx 9.86960$, $\ln 10 \approx 2.302585$, $e \approx 2.71828$, $\sqrt{2} \approx 1.41421$, $\sqrt{3} \approx 1.73205$
- 对实数 x，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 用 $|x|$ 表示 x 的绝对值.
- 对有限集合 X，用 $|X|$ 表示 X 中的元素个数.

1. 考虑 $\ln(1+x+x^2+x^3)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开，设 a 为其中 x^{2024} 项的系数. 计算 $[|a|^{-1}]$.

2. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的无穷次可微函数，满足方程 $f''(x) = xf(x)$, 且 $f(0)=18, f'(0)=3$. 设 $f(x)$ 的泰勒展开式为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 计算 $[\dfrac{a_9}{a_{10}}]$.

3. 令 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\cos(nx)$. 记 $A = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$. 求 $[10A]$.

4. 记 $S = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2+x^4} dx$. 求 $[100S^2]$.

5. 记 S_9 是 9 阶置换群. 称 S_9 中两个元素 σ_1, σ_2 是共轭的，如果存在 $\tau \in S_9$，使得 $\tau^{-1}\sigma_1\tau = \sigma_2$. 记 $\sigma = (12345)(4567) \in S_9$. 求 S_9 中与 σ 共轭的元素个数.

6. 令 $f(x) = [x] + [2x] + [3x] + [4x] + [5x]$. 当 x 取遍 $[0, 50]$ 中的实数时, 求 $f(x)$ 可以取到的整数值的个数.

7. 记 $M(100, \mathbb{R})$ 为所有 100 阶实方阵的集合. 设 $S = \{A \in M(100,\mathbb{R}) \big| A^4 + A^2 = 0\}$. 称 $A, B \in S$ 是相似的，如果存在可逆的 100 阶实方阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$. 问最多可以在 S 中找到几个互不相似的方阵?

8. 记 $S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{Z}^4 \big| 0 \le x,y,z,w \le 18, x^2+y^2 \equiv z^2+w^2 \ (mod\ 19)\}$. 求 $|S|$.

9. 考虑 $(n-1)$ 阶方阵

$$M_n(\lambda) = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -\lambda & -\lambda & -\lambda & \cdots & -\lambda \\ -\lambda & 8-\lambda & -\lambda & -\lambda & \cdots & -\lambda \\ -\lambda & -\lambda & 15-\lambda & -\lambda & \cdots & -\lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ -\lambda & -\lambda & -\lambda & -\lambda & \cdots & (n^2-1)-\lambda \end{bmatrix},$$

即 $M_n(\lambda)$ 的第 k 个对角元为 $(k+1)^2-1-\lambda$, 非对角元为 $-\lambda$. 设 λ_n 是最大的实数 λ 使得 $\det(M(\lambda)) = 0$. 记 $I = \limsup\limits_{n\to\infty} \lambda_n$，计算 $[100I]$.

10. 设 $f(x)$ 是 $(0,\infty)$ 上的单调递减非负函数. 设对于任意正实数 t, 区间 $\{x\in(0,\infty)\big|f(x)>t\}$ 的长度为 $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$. 求 $[10\int_0^\infty f(x)dx]$.

11. 令 $I=\int_{50}^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$. 计算 $[-\ln I]$.

12. 设 V 是所有次数不超过 100 的实系数多项式构成的线性空间. 令

$$V_1=\{f\in V\big|f^{(2k-1)}(0)=0,k=1,2,\cdots,50\},$$

$$V_2=\{f\in V\big|f^{(k)}(-1)=f^{(k)}(1)=0,k=70,71,\cdots,98\}.$$

求 $\dim(V_1+V_2)$.

13. 有 20 盏红灯，10 盏绿灯，每次随机灭掉其中一盏灯，直到某种颜色的灯全部灭掉. 令 a 为剩下的灯的数目的平均值，计算 $[10a]$.

14. 在空间直角坐标系 xyz 中，先以 z 轴为中心轴旋转 $\frac{\pi}{3}$，再以 x 轴为中心轴旋转 $\frac{\pi}{3}$, 得到一个以某条直线为中心轴的旋转. 设新的旋转的角度为 $\theta\in(0,\pi]$. 求 $[(\tan\theta)^2]$.

15. 对 $\mathbb{R}^{100}$ 中的点 $x=(x_1,\cdots,x_{100}),y=(y_1,\cdots,y_{100})$, 令 $f(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{100}(x_i-y_i)^2}$. 对于 $x\neq y$, 定义 100 阶方阵 $A_{x,y}=[a_{ij}]$, 其中 $a_{ij}=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_j}f(x,y)$ 为第 i 行，第 j 列的矩阵元. 求 $A_{x,y}$ 的秩的最小可能值与最大可能值的和，即求

$$\min\{\mathrm{rank}(A_{x,y})\big|x,y\in\mathbb{R}^{100},x\neq y\}+\max\{\mathrm{rank}(A_{x,y})\big|x,y\in\mathbb{R}^{100},x\neq y\}.$$