

博士生资格考试《代数与数论方向》考试大纲（2025 秋季开始）

一、前言

为了进一步提高清华大学求真书院博士研究生的质量, 特为代数与数论方向博士生资格考试制订本大纲。考试对象为参加清华大学博士生入学考试或资格考试的考生。

二、《代数与数论方向》考试大纲, 2025 秋季开始

基础部分 (70 分)

- 群论: 西罗定理, p 群, 可解群, 自由群。
- 环和模: 张量积, 行列式, 约当标准形, 主理想整环 (PID), 唯一分解整环 (UFD), 多项式环。
- 域论: 分裂域, 可分和不可分扩张。
- 伽罗瓦理论: 伽罗瓦理论的基本定理, 有限域, 分圆域。
- 同调代数: 正合列, 蛇形引理和五引理, 投射模, 内射模和平坦模, 复形, (上) 同调。
- 交换代数: 局部化, 希尔伯特基定理, 整扩张, 根式理想, Zariski 拓扑和希尔伯特零点定理, 戴德金环, 离散赋值环。
- 有限群表示论: 特征标理论, 诱导表示, 群环的结构。
- 李群和李代数的基础知识: 指数映射, 幂零李代数和李群, 半单李群/李代数的结构及其表示。

高等部分 (30 分, 从 6 个问题中选择 2 个)

数论:

- 数域中的素理想分解 (分解群, 惯性群, 弗罗贝尼乌斯, 相对差分 and 判别式)
- 有限性定理 (理想类群, 类数, 迪利克雷单位定理)
- p -进方法 (p -进域, 非阿基米德赋值, 完备化, 亨塞尔引理, 牛顿多边形)
- 分析方法 (戴德金 zeta 函数和类数公式)

代数几何:

- 代数簇 (维数, 不可约性, 光滑点和奇异点, 函数域和有理映射, 恰当态射, 微分)
- Segre 嵌入和 Veronese 嵌入, 格拉斯曼流形和普吕克嵌入
- 希尔伯特多项式和 Bézout 定理
- 代数曲线 (亏格, 黎曼-罗赫定理, 黎曼-胡尔维茨定理)

几何表示论:

- 范畴 $\mathcal{O}$ 的基本知识 (外尔特征公式, Verma 模, 哈里什-钱德拉同构, 块分解, 投射模)
- 旗流形的几何 (Bruhat 分解, 普吕克嵌入)
- 赫克代数

三、《代数与数论方向》考核要求目标

对《代数与数论方向》课程考试内容有很好的理解和掌握, 包括基本定义、性质、定理及其证明思想、内在联系、主要技巧、主要理论的基本应用等。能应用基本理论、方法和技巧证明或解答相应的题目。



四、考试方式

闭卷，笔试，试卷满分 100 分

五、参考书目：

- M. Artin, Algebra
- D. S. Dummit and R. M. Foote, Abstract Algebra
- S. Lang, Algebra
- M. F. Atiyah and I. G. MacDonald, Introduction to Commutative Algebra
- J.-P. Serre, Representations of Finite Groups
- P. Etingof et al, Introduction to Representation Theory
- W. Fulton and J. Harris, Representation Theory: A First Course
- J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and Representation theory
- D. A. Marcus, Number Fields
- Z. I. Borevich and I. Shafarevich, Number Theory
- S. Lang, Algebraic Number Theory
- J. Neukirch, Algebraic Number Theory
- E. Looijenga, Algebraic varieties
- J. Harris, Introduction to Algebraic Geometry
- J. E. Humphreys, Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category $\mathcal{O}$