

清华大学丘成桐领军计划数学水平考试

以下符号和近似值可能有用:

det: 行列式

Tr: 迹

I : 单位方阵

对映射 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$, 用 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 表示 g 和 f 的复合.

\mathbb{Z} : 整数全体, \mathbb{Q} : 有理数全体, \mathbb{R} : 实数全体, \mathbb{C} : 复数全体

$[x]$: 不大于 x 的最大整数

$e \sim 2.7182818$, $\pi \sim 3.1415926$

$\ln 2 \sim 0.693147$, $\ln 3 \sim 1.098612$, $\ln 5 \sim 1.609438$,

$\ln 7 \sim 1.945910$, $\ln 10 \sim 2.302585$,

$\sqrt{2} \sim 1.414214$, $\sqrt{3} \sim 1.732051$, $\sqrt{5} \sim 2.236068$

1. 对于一个实数 x , 令 $\{x\} = x - [x]$ 为 x 的小数部分. 记

$$S = \int_0^{2024} \min\left(\left\{\frac{x}{8}\right\}, \left\{\frac{x}{4}\right\}\right) dx.$$

求 $[S]$.

2. 已知圆锥面 $3(x^2 + y^2) = z^2$ 上的两个点 $P = (-\sqrt{3}, 3, 6)$, $Q = (\sqrt{3}, 0, 3)$. 令圆锥面上连接这两个点的最短曲线的长度为 L . 求 $[10L]$.

3. 令 A, B, C, D, E, F 为 3 阶实方阵, 且

$$\begin{pmatrix} I & A & C \\ & I & B \\ & & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & D & F \\ & I & E \\ & & I \end{pmatrix}.$$

如果

$$A = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},$$

且 $C = A + B - I$, 求 $[|\det F|]$.

4. 令

$$S = \int_1^{\infty} \frac{(\ln(x))^5}{x^2} dx.$$

求 $[S]$.

5. 记

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 n}{2^m (n 2^m + m 2^n)}.$$

求 $[100S]$.

6. 求 $\prod_{k=1}^6 (x^5 - 5x + k) = 0$ 的实数解个数.

7. 设 A 是一个3阶方阵, 其矩阵元构成的集合为 $\{1, 2, \dots, 9\}$, 且 A 的每一行的矩阵元从左至右递增, 每一列的矩阵元从上到下递增. 求这样的 A 的个数.

8. 对任意实方阵 A , 定义

$$e^A = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

求最多能找到几个在 \mathbb{C} 上互不相似的20阶实方阵 A , 满足 $e^A = I$, 且 A 的特征值的模长均不超过20.

9. 考虑所有有理数构成的加法群 \mathbb{Q} 以及它的商群 \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . 令 A 是所有分母不超过10的有理数在 \mathbb{Q}/\mathbb{Z} 的像, G 是 \mathbb{Q}/\mathbb{Z} 中包含 A 的最小子群. 求 G 的阶数.

10. 令 $V = \mathbb{R}^{10}$. 对任意 $x = (x_1, \dots, x_{10}), y = (y_1, \dots, y_{10}) \in V$, 定义

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_{10} y_{10}.$$

对一个非零元素 $v \in V$, 定义一个线性变换 $P_v: V \rightarrow V$ 为

$$P_v(x) = x - \frac{2(x, v)}{(v, v)} v.$$

给定 $w, u \in V$ 满足 $0 < (w, u) < \sqrt{(w, w)(u, u)}$. 令 $Q = P_w \circ P_u$ 为 P_w, P_u 的复合. 考虑满足 $T \circ Q = Q \circ T$ 的线性变换 $T: V \rightarrow V$ 全体构成的实线性空间 M . 求 $\dim(M)$.

11. 设 A 是一个10阶方阵, 其每行恰有5个1和5个0, 且 $A^2 + 5A$ 的每个矩阵元都是5. 求这样的 A 的个数.

12. 考虑这样的5阶方阵 A , 其中的矩阵元属于 $\{0, 1, 2, 3, \dots, 14\}$, 且 $\det A$ 与15互素. 令 n 是这样矩阵的个数. 求 n 的素因子分解中2的次数.

13. 令 $A = \begin{bmatrix} 11 & 11 & 20 \\ 10 & 10 & -8 \\ -10 & 2 & 8 \end{bmatrix}$. 求最大的正整数 n , 使得可以找到两个整系数三阶方阵 P, Q , 满足 $\det(P), \det(Q)$ 均为1或 -1 , 且 PAQ 是一个对角阵, 其对角线元素含有 n .

14. 令 $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. 令

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-10 \cosh(2x)} dx.$$

计算 $[\ln a]$.

15. 已知椭球

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1.$$

记过点 $(0, 0, 1)$ 的平面与该椭球截出的面积的最大值为 A . 求 $[100 \frac{A^2}{\pi^2}]$.