

博士生资格考试《分析与方程方向》考试大纲

一、前言

为了进一步提高清华大学求真书院博士研究生的质量, 特为分析与方程方向博士生资格考试制订本大纲。考试对象为参加清华大学博士生入学考试或资格考试的考生。

二、《分析与方程方向》考试大纲

实分析和泛函分析:

- 测度论: 测度空间, 外测度, Lebesgue 测度, 测度空间上的积分, 收敛定理, 符号测度, Radon-Nikodym 定理, Lebesgue 分解定理, 测度空间的乘积, Fubini 定理。
- L^p 空间: Riesz-Fisher 定理, L^p 空间的对偶, Jensen 不等式。
- 微分定理: 有界变差函数, 绝对连续函数, 覆盖定理, Lebesgue 微分定理, Newton-Leibniz 公式。
- 拓扑空间上的 Borel 测度: Radon 测度, Riesz 表示定理。
- Banach 空间理论: Hahn-Banach 定理, 开映射定理, 共鸣定理, 闭图像定理, 对偶空间, 弱和弱*收敛。
- Hilbert 空间理论: Riesz 表示定理, Lax-Milgram 定理。
- 算子理论: 紧算子的基本性质, Riesz-Fredholm 理论, 紧算子的谱理论, Fredholm 算子。
- Fourier 级数: Fourier 级数的收敛, Cesaro 和 Abel 求和, Fourier 级数的应用。

复分析:

- 复解析函数: 复积分, Cauchy 定理, Cauchy 积分公式, Morera 定理。
- 亚纯函数: 零点和极点, 留数, 辐角原理。
- 调和函数: 均值性质, 反射原理, Dirichlet 问题。
- 级数和乘积展开: 幂级数和 Laurent 级数, 部分分式展开, Weierstrass 无穷乘积, Hadamard 分解定理。
- 特殊函数: Gamma 函数, Zeta 函数, 椭圆函数。
- 共形映射: 线性分式变换, Schwarz 引理, Riemann 映射定理, Picard 定理。
- 基本 Riemann 曲面。

常微分方程和偏微分方程:

- 常微分方程: 简单方程的显式解, 初值问题解的存在唯一性理论, 线性常微分方程系统, 相空间分析, 稳定性理论, Lyapunov 方法。
- 二阶常微分方程的边值问题: Sturm-Liouville 理论, 一些偏微分方程的分离变量法。
- 一阶偏微分方程: 传输方程, 特征线法, Burgers 方程, Hamilton-Jacobi 方程, 守恒律方程。
- 二阶线性椭圆方程: Laplace 方程的基本解, Green 函数, 弱解, Dirichlet 和 Neumann 边值问题解的存在唯一性, 能量方法, 极大值原理, Harnack 不等式。
- 二阶线性抛物方程: 热方程的基本解, 弱解, 初值问题和初边值问题解的存在唯一性, 能量方法, 极大值原理, 半群理论。
- 二阶线性双曲方程: 波方程的基本解, 弱解, 初值问题和初边值问题解的存在唯一性, 能量方法, 解的传播, 半群理论。
- 分布理论: 测试函数与分布, 分布的运算, 与光滑函数的乘积, 微分, 张量积, 卷积, 在

光滑映射下的拉回和前推, Schwartz 空间, 缓增分布, Fourier 变换。

·Sobolev 空间: 光滑函数逼近, 延拓, 迹定理, Sobolev 嵌入定理, Poincare 不等式。

三、《分析与方程方向》考核要求目标

对《分析与方程方向》课程考试内容有很好的理解和掌握, 包括基本定义、性质、定理及其证明思想、内在联系、主要技巧、主要理论的基本应用等。能应用基本理论、方法和技巧证明或解答相应的题目。

四、考试方式

闭卷, 笔试, 试卷满分 100 分

五、参考书目:

- [1] Walter Rudin, Real and Complex Analysis, Third Edition, McGraw-Hill Book Co., 1987.
- [2] Elias M. Stein and Rami Shakarchi, Real Analysis. Measure theory, integration, and Hilbert spaces, Princeton University Press, 2005.
- [3] Gerald B. Folland, Real analysis. Modern Techniques and Their Applications, Second Edition, John Wiley & Sons, 1999.
- [4] Peter Lax, Functional Analysis, John Wiley & Sons, 2002.
- [5] Elias M. Stein and Rami Shakarchi, Fourier Analysis, An Introduction, Princeton University Press, 2003.
- [6] Lars Ahlfors: Complex Analysis-an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable. Third Edition, McGraw-Hill Book Co. 1978.
- [7] Elias M. Stein and Rami Shakarchi, Complex Analysis, Princeton University Press, 2003.
- [8] Wolfgang Walter, Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, 1998.
- [9] Lawrence Craig Evans, Partial Differential Equations, Second edition, AMS, 2010.
- [10] Lars Hormander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, vol. I, Springer-Verlag, 1983.